Erstaunliches und Bekanntes beim Planckschen Strahlungsgesetz

Jürgen Dollinger

11. Mai 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die Herleitung des Wienschen Verschiebungsgesetzes aus dem Planckschen Strahlungsgesetz ist eine beliebte Übungsaufgabe für Studenten. Daß dabei aber einige unerwartete Fallstricke auftreten, wenn man sie nicht wie üblich umgeht indem man auf die Berechnung der Wienkonstante verzichtet, ist wenig bekannt.

Tatsächlich befindet sich das Maximum der Planck–kurve an einer anderen Stelle wenn man das Plancksche Strahlungsgesetz einmal in Frequenzen und einmal in Wellenlängen formuliert. Ich habe das auch erst bezweifelt und eine Wette verloren.

Im Folgenden wird gezeigt, daß das tatsächlich der Fall ist und auch versucht dies zu erklären. Das beliebte Beispiel ',Farbe der Sonne" wird dabei aufgegriffen.

Ebenfalls für Verwirrung sorgen die Vorfaktoren im Planckschen Strahlungsgesetz, die daher rühren, daß mal die Energiedichte, oder auch mal die abgestrahlte Leistung pro strahlender Fläche und Raumwinkel, oder irgendwas anderes ähnliches angegeben wird. Schließlich wird ein Einblick in die Herleitung des Planckschen Strahlungsgesetzes gegeben, wobei auch mal die weniger bekannten rein klassischen Teile betrachtet werden.

Die verlorene Wette und die wesentlichen Teile dieser Abhandlung entstanden im Jahr 2005. 2009 entstand der Teil mit der Herleitung des Strahlungsgesetzes. 2014 wurde noch ein Titel und ein Inhaltsverzeichnis spendiert.

2 Das Plancksche Strahlungsgesetz

Für die Strahlungsleistung eines schwarzen Strahlers der Fläche A im Wellenlängenintervall $\lambda \ldots \lambda + d\lambda$ gilt [1]:

$$dP_\lambda = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{A}{e^{\frac{hc}{k\lambda T}} - 1} d\lambda \tag{1}$$

Will man dies lieber in Abhängigkeit der Frequenz $\nu = \frac{c}{\lambda}$ muß man auch das Differential

$$d\lambda = -\frac{c}{\nu^2} d\nu \tag{2}$$

beachten[1] und erhält (vgl zB [2]):

$$dP_\nu = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \frac{A}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu \tag{3}$$

Häufig findet man leicht abweichende Formeln, weil statt der Leistung, die in den Halbraum abgestrahlt wird, die Energiedichte im Hohlraum oder auch die Leistung pro Fläche in irgendwelche anderen Raumwinkel angegeben wird.

[1] Das Minuszeichen lassen wir unter den Tisch fallen, sagen aber im Abschnitt 6 noch etwas dazu.

3 Das Wiensche Verschiebungsgesetz

Wir wollen aus dem Planckschen Strahlungsgesetz herleiten für welche Frequenz bzw Wellenlänge am meisten Energie abgestrahlt wird.

Wie wir später sehen werden ist diese Formulierung bereits nicht wirklich korrekt. Jedenfalls bestimmen wir das Maximum der Planckverteilung. Dazu bilden wir die erste Ableitung und setzen sie null.

3.1 Herleitung aus dP_λ

Wir betrachten die Funktion

$$f(\lambda) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{A}{e^{\frac{hc}{k\lambda T}} - 1}.$$

Um die Lage des Maximums zu bestimmen bilden wir die erste Ableitung

$$f'(\lambda) = \frac{-10\pi hc^2}{\lambda^6} \frac{A}{e^{\frac{hc}{k\lambda T}} - 1} + \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{-A}{(e^{\frac{hc}{k\lambda T}} - 1)^2} e^{\frac{hc}{k\lambda T}} \frac{-hc}{kT\lambda^2}$$

und setzen sie Null

$$\frac{-10\pi hc^2}{\lambda^6} \frac{A}{e^{\frac{hc}{k\lambda T}} - 1} + \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{A}{(e^{\frac{hc}{k\lambda T}} - 1)^2} e^{\frac{hc}{k\lambda T}} \frac{hc}{kT\lambda^2} = 0$$

dividieren die Vorfaktoren und $\frac{1}{e^{\frac{hc}{k\lambda T}} - 1}$ ab

$$\frac{-5}{\lambda} + \frac{1}{e^{\frac{hc}{k\lambda T}} - 1} e^{\frac{hc}{k\lambda T}} \frac{hc}{kT\lambda^2} = 0$$

$$5 = \frac{hc}{kT\lambda} \frac{1}{1 - e^{\frac{-hc}{k\lambda T}}}$$

und mit der Abkürzung $x = \frac{hc}{kT\lambda}$ ergibt sich

$$x = 5(1 - e^{-x}). \tag{4}$$

Diese tranzendente Gleichung hat neben der Lösung $x = 0$ die für uns interessante Lösung $x_1 \approx 4.965$. Eine analytische Darstellung über Lambertsche W–Funktion hilft wenig weiter. Damit gilt:

$$\lambda_{\max} T = \frac{hc}{kx_1} = 2.898\ 10^{-3}\mathrm{mK} \tag{5}$$

Diese Gleichung ist als Wiensches Verschiebungsgesetz bekannt.

3.2 Herleitung aus dP_ν

In analoger Weise betrachten wir die Funktion

$$f(\nu) = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2}\frac{A}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}$$

$$f'(\nu) = \frac{6\pi h\nu^2}{c^2}\frac{A}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1} + \frac{2\pi h\nu^3}{c^2}\frac{-A}{(e^{\frac{h\nu}{kT}}-1)^2}e^{\frac{h\nu}{kT}}\frac{h}{kT}$$

$$3 = \nu\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}e^{\frac{h\nu}{kT}}\frac{h}{kT}$$

$$3 = \frac{h\nu}{kT}\frac{1}{1-e^{-\frac{h\nu}{kT}}}$$

und mit der Abkürzung $x = \frac{h\nu}{kT}$ ergibt sich

$$x = 3(1-e^{-x}). \tag{6}$$

Mit einer Lösung bei $x_0 = 2.8214$. Nur damit man die Lambertsche W–Funktion gesehen hat doch noch was maple dazu meint:

```
solve(x=3*(1-exp(-x)),x);
                    3 + LambertW(-3 exp(-3)), 0
evalf(%);
                    2.821439372, 0.
```

Damit ist

$$\frac{cT}{\nu_{\max}} = \frac{hc}{kx_0} = \frac{6.626\ 10^{-34}\mathrm{Js}2.998\ 10^8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{1.381\ 10^{-23}\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}2.8214} = 5.098\ 10^{-3}\mathrm{mK} \tag{7}$$

bzw

$$\frac{\nu_{\max}}{T} = 5.88\ 10^{10}\mathrm{Hz/K}. \tag{8}$$

Nun sollte man ja erwarten, daß $\frac{cT}{\nu_{\max}}$ gerade wieder $\lambda_{\max}T$ ist. Genau das ist aber nicht der Fall. Es gilt also nicht $\lambda_{\max}\nu_{\max} = c$ sondern $\lambda_{\max}\nu_{\max} = c\frac{x_0}{x_1} \approx 0.57c$.

Anders formuliert kann man aus dem Planckschen Gesetz in Frequenzen formuliert nicht das Wiensche Verschiebungsgesetz herleiten. Man erhält zwar auch $\lambda_{\max}T = \text{const}$, aber mit einer fast doppelt so großen Konstante.

4 Interpretation

Bitte? Was? Was interessiert sich die Farbe eines Photons dafür ob sie in Wellenlängen oder in Frequenzen gemessen wird? Ist das überhaupt der Fall oder ist die Fragestellung ganz falsch und das Ganze ist ein seltsames Artfakt?

Schauen wir erst einmal die mathematische Seite an. Läßt man sich nicht durch allzu viele Konstanten und Lambertsche W–Funktionen verwirren stellt man fest daß sich Gleichung 6 und 4 lediglich im Vorfaktor 3 bzw 5 unterscheiden und auch die Lösung der Gleichungen ist fast 3 bzw 5, eben x_0 bzw x_1. Zum anderen stammen die 3 bzw 5 jeweils von der Ableitung des Vorfaktors ν^3 bzw λ^{-5} aus Gleichung 3 bzw 1. Die Potenz des Vorfaktors wiederum unterscheidet sich nur wegen der Umrechnung des Differentials aus Gleichung 2.

Es ist also das Differential oder physikalisch formuliert die Intervalle die den Unterschied ausmachen. Die Eigenschaft der Planckfunktion eine spektrale Dichte zu sein bedeutet nämlich gerade, daß sie nicht die Leistung bei einer bestimmten Wellenlänge angibt sondern in die Leistung in einem kleinen Intervall bei dieser Wellenlänge.

Um die Leistung in den Intervallen vergleichen zu können wählt man gleich breite, äquidistante Intervalle. Äquidistante Wellenlängenintervalle ergeben auf Frequenz umgerechnet aber keine äquidistanten Frequenzintervalle. Die Leistung, die im entsprechenden Intervall natürlich in beiden Fällen dieselbe ist, ist aber spektrale Leistungsdichte mal Intervallbreite. Am Maximum der Kurve über die Wellenlänge ist also nicht nur die Leistung besonders groß sondern auch die Intervallbreite im Vergleich zur Frequenzauftragung besonders klein. Deswegen ergibt sich dort die maximale spektrale Leistungsdichte. Im nächsten Kapitel soll dies an einem Beispiel erläutert werden.

Die Frage nach der maximalen Leistung kann also gar nicht zufriedenstellend beantwortet werden. Die Planckformel liefert vielmehr die Antwort auf die Frage nach der Leistung in einem vorgegebenen Intervall.

5 Die Farbe der Sonne

Betrachten wir einen Körper der Temperatur $T = 5778\text{K}$ und der Oberfläche $A = 6.1\ 10^{18}\text{m}^2$. Das sind etwa die Daten der Sonne[4][2]. Die Strahlungsmaxima

[2] In der Literatur scheint es da eine gewisse Inkonsistenz zu geben. Das liegt zum einen daran, daß die Sonne nicht überall gleich heiß ist, ja der Begriff Temperatur unter solchen Bedingungen nur bedingt vernünftig ist. Zum andern scheinen manche Leute falsch zwischen Celsius und Kelvin–Skala umgerechnet zu haben. Die Temperatur $T = 5778\text{K}$ erschien deshalb angemessen, weil diese durch den Begriff Effektivtemperatur mit Verweis auf schwarze Körper

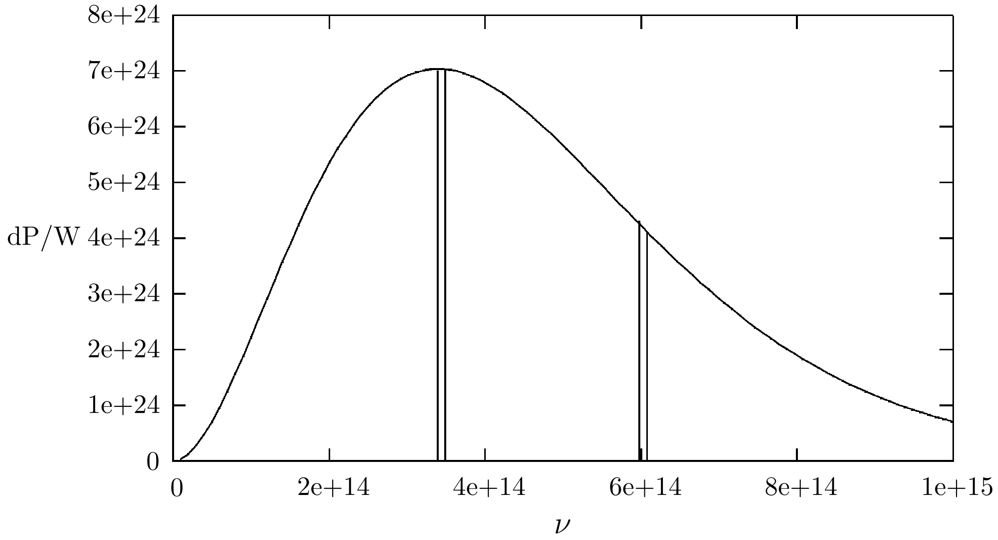

Abbildung 1: Abgestrahlte Leistung der Sonne pro Frequenzintervall. Zwei gleich breite Frequenzintervalle.

liegen bei

$$\nu_{\max} = \frac{kx_0T}{h} = 3.3977\ 10^{14}\mathrm{Hz}$$

was einer Wellenlänge von $\frac{c}{\nu_{\max}} = 8.82\ 10^{-7}$m entspricht (infrarot). bzw

$$\lambda_{\max} = 5.01\ \ 10^{-7}\mathrm{m}$$

(grün?) was einer Frequenz von $\frac{c}{\lambda_{\max}} = 5.98\ 10^{14}\frac{1}{\mathrm{s}}$ entspricht. Mit $d\nu = 10^{13}$Hz ergibt sich das Plancksche Gesetz zu:

$$dP = 2.83\ 10^{-18}\mathrm{Ws}^3\frac{\nu^3}{e^{8.3 10^{-15}\mathrm{s}\nu} - 1}$$

Im Abbildung 1 sind die beiden Intervalle der Breite $d\nu$ bei $\nu_{\max}$ und bei $\frac{c}{\lambda_{\max}}$ dargestellt.

Doch was passiert wenn wir die selben Intervalle als Auftragung gegen die Wellenlänge darstellen? Weil wir $d\lambda$ nicht festlegen wollen tragen wir mal $dP/d\lambda$ gegen λ auf. Siehe Abbildung 2.

Natürlich befindet sich im Intervall bei 882 nm weiterhin die meiste Leistung, doch das ist kein Wunder ist doch dieses Intervall 3 mal breiter als das Intervall bei 501 nm! Geht man aber zu äquidistanten Wellenlängenintervallen über so findet sich eben ein ganz anderes Bild und das Maximum wandert zu 501 nm,

wenigstens einen Hinweis auf ihre Herkunft gab.

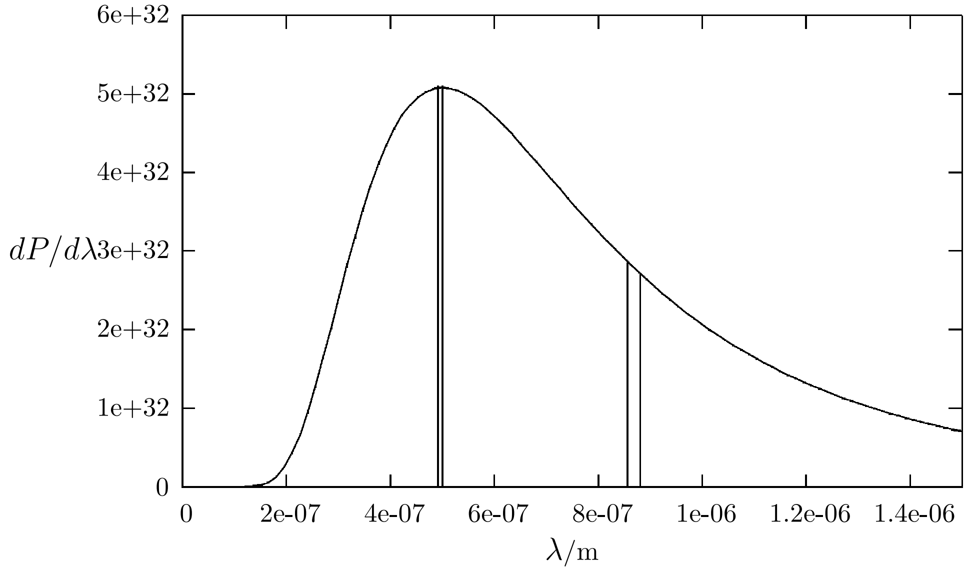

Abbildung 2: Abgestrahlte Leistung der Sonne pro Wellenlängenintervall. Die beiden Frequenzintervalle sind jetzt unterschiedlich breit und haben die Position gewechselt.

nicht etwa weil dort mehr Photonen abgestrahlt werden, sondern weil dort die (Frequenz-)Intervalle kleiner sind.

Welche Farbe hat denn nun die Sonne? Diese Frage ist deutlich weniger trivial zu beantworten als es zunächst scheint. Zum einen besteht Sonnenlicht nicht nur aus dem Licht am Maximum (an welchem denn?) sondern ist eine Mischung aus verschiedenen Wellenlängen, zum andern ist die Wellenlänge nicht das allein entscheidende. Die Physiologie des Sehens ist recht kompliziert [6, 5]. Die beste Antwort scheint mir *weiß* zu sein, aber auch *gelb* hat gute Argumente.

Wenn aber jemand behauptet die Sonne sei gelb, weil das Maximum des Spektrums im gelben liege, glauben Sie nichts! Ein besseres Argument sind da schon die vielen Kinderbilder auf denen die Sonne gelb ist.

6 Das Stefan–Boltzmann Gesetz

Das Stefan–Boltzmann[3] Gesetz ist ebenfalls beliebte Übungsaufgabe. Dabei ist die gesamte abgestrahlte Leistung zu berechnen. Gibt es auch hier eine Überraschung im Vergleich zwischen dem Integral über die Wellenlänge und über die

[3]Nein! Herr Boltzmann heißt Ludwig mit Vornamen. Herr Stefan heißt Josef.

Frequenz? Zum Glück nicht.

$$P = \int dP_\nu = \int_0^\infty \frac{2\pi h \nu^3}{c^2} \frac{A}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu$$

ergibt mit der Substitution $\nu = c/\lambda$

$$P = \int_\infty^0 -\frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \frac{A}{e^{\frac{hc}{k\lambda T}} - 1} d\lambda = \int_0^\infty \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \frac{A}{e^{\frac{hc}{k\lambda T}} - 1} d\lambda.$$

Die Umrechnung der Differentiale entspricht also gerade der Integration durch Substitution. Außerdem verstehen wir auch wo das Minuszeichen hingeht: Die Grenzen drehen sich um und wir haben die selben Grenzen obwohl wir in anderer Reihenfolge integrieren.

Mit der Substitution $x = \frac{h\nu}{kT}$ und dem bekannten Integral $\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$ erhält man

$$P = \frac{2\pi k^4 T^4}{c^2 h^3} A \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 h^3} A T^4 = \sigma A T^4.$$

Der Wert der Stefan Boltzmann Konstante σ stimmt mit dem bekannten Literaturwert von $\sigma = 5.67\, 10^{-8} \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2 K^4}}$ überein.

Das ging deswegen alles so glatt, weil wir gleich mit der richtigen Formulierung der Planckformel gestartet sind, die mit dem übereinstimmt was das Stefan Boltzmann Gesetz angibt, nämlich die Strahlungsleistung in den Halbraum.

Man beachte, daß diese Formel auch für die Berechnung der Gesamtleistung der Sonne richtig ist, obwohl die Sonne als Kugel natürlich in den Gesamtraum strahlt, weil von jedem Teilstück der Sonnenoberfläche nur die Strahlung in den äußeren Halbraum nicht aber die Strahlung ins Sonneninnere zählt.

7 Das bekannte Integral

Haben Sie bemerkt, daß Sie schon wieder betrogen wurden? Natürlich stimmt das bekannte Integral $\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$, man kann das nachschlagen. Aber wer kennt das Integral wirklich? Kann man es auch mit “Physikmitteln” ausrechnen? Ja, aber wirklich einfach ist es nicht.

Wir entwickeln zunächst den Integranden geeignet, integrieren summandenweise und führen das Integral auf eine unendliche Reihe zurück. Wer noch ein paar Studenten abschrecken möchte sagt Zeta–funktion dazu. Dann entwickeln wir die Funktion x^2 in eine Fourrierreihe um, quasi als Abfallprodukt, mittels der Parcevalgleichung die Reihe zu berechnen.

Es gilt:

$$\frac{1}{e^x-1} = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}.$$

Damit ist

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1}dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\infty x^3 e^{-nx}dx$$

Das Integral berechnen wir mit dreimaliger partieller Integration:

$$\int_0^\infty x^3 e^{-nx}dx = \frac{3}{n}\int_0^\infty x^2 e^{-nx}dx = \frac{6}{n^2}\int_0^\infty x e^{-nx}dx = \frac{6}{n^3}\int_0^\infty e^{-nx}dx = \frac{6}{n^4}$$

Und somit

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1}dx = 6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = 6\,\zeta(4).$$

7.1 Die Fourrierreihe

Es gibt verschiedene Formulierungen von Fourrierreihen, mal untersucht man das Intervall $[-\pi,\pi]$ mal das Intervall $[0,2\pi]$, mal sind es Sinus– und Cosinus–Funktionen, dann wieder komplexe e–Funktion oder gleich verallgemeinerte Orthnormalsysteme. Außerdem variieren Vorfaktoren und exakte Formulierung der Formeln auf die es aber hier ankommt.

Wir nehmen folgende Formulierung: Eine reelle Funktion $f(x)$ im Intervall $[-\pi,\pi]$ konvergiert im Mittel gegen

$$f(x) = \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} + b_n\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\right)$$

mit den Fourrierkoeffizienten

$$a_0 = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(x)dx, \quad a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}\,dx \quad \text{und} \quad b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\,dx.$$

Dann gilt die Parcevalgleichung

$$a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx$$

Nun wählen wir $f(x) = x^2$.

$$a_0 = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{x^2}{\sqrt{2\pi}}dx = \frac{2\pi^3}{3\sqrt{2\pi}}$$

Und für $n > 0$ mit partieller Integration

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^2}{\sqrt{\pi}} \cos nx\, dx = \frac{-2}{n\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx\, dx \\ &= \frac{4\pi}{n\sqrt{\pi}} \frac{(-1)^n}{n} - \frac{2}{n^2\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx = \frac{4\pi(-1)^n}{n^2\sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

Die b_n verschwinden, weil x^2 eine gerade Funktion ist. Damit ist Parceval

$$\begin{aligned} \frac{4\pi^6}{18\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16\pi^2}{n^4\pi} &= \frac{2\pi^5}{5} \\ 8\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} &= \pi^4(\frac{1}{5} - \frac{1}{9}) = \frac{4}{45}\pi^4 \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} &= \frac{\pi^4}{90} \end{aligned}$$

Aus unserem Integral wird damit tatsächlich

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = 6\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{15}$$

8 Zur Herleitung des Planckschen Strahlungsgesetzes

Das Plancksche Strahlungsgesetz ist beliebtes Beispiel, wenn es darum geht die ersten Ideen der Quantenmechanik einzuführen, wobei von der klassischen Welle der Elektrodynamik zu Photonen übergegangen wird. Auch in Thermodynamikbüchern, die die Bose–Einstein–Verteilung behandeln wird dies als Beispiel angeführt. Die klassische Herleitung der Dichte der elektromagnetischen Wellen kommt häufig etwas kurz. Anregungen geben dabei [8], [7], [9] und vor allem [10].

Wir gehen zunächst von einem quaderförmigen Hohlraum aus, dessen Wände aus gut leitendem Material bestehen, sodaß das Feld am Rand verschwindet und wir es uns periodisch fortgesetzt denken können. Er habe die Abmessungen L_x, L_y und L_z und damit das Volumen $V = L_x L_y L_z$. In Abwesenheit von Ladungen sind die Lösungen der Maxwellgleichungen stehende Wellen, das heißt daß die Abmessungen des Kastens ganzzahlige vielfache der halben Wellenlänge sein müssen. Um im dreidimensionalen auch schräg laufende Wellen zu berücksichtigen, die wir in ihre Komponenten längs der Achsen zerlegen, formulieren wir das Ganze am besten mit Hilfe des Wellenvektors $\vec{k}$ und seinen Komponenten:

$$k_x L_x = n_x \pi \qquad k_y L_y = n_y \pi \qquad k_z L_z = n_z \pi$$

Bei einer eindimensionalen Welle in x-Richtung wäre also $kL_x = n\pi$ bzw $\frac{2\pi}{\lambda}L_x = n\pi$ oder $L_x = n\frac{\lambda}{2}$. Mittels

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{\omega}{c}$$

können wir nach Belieben mit dem Betrag k des Wellenvektors, mit der Wellenlänge, der Frequenz oder der Kreisfrequenz rechnen. Natürlich ist der Betrag des Wellenvektors $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$ und wir führen außerdem mit $n = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$ einen n–Raum ein der uns letztlich dazu dient die Moden im Hohlraum zu zählen.

Ist der Hohlraum groß gegen die Wellenlänge so passen viele k–Werte in ein kleines Volumenelement und wir können zu einer kontinuierlichen Betrachtung übergehen. Betrachten wir nun ein Volumenelement d^3k im k–Raum so entspricht diesem genau ein Volumenelement im n–Raum:

$$d^3k = dk_x\, dk_y dk_z = dn_x \frac{\pi}{L_x} dn_y \frac{\pi}{L_y} dn_z \frac{\pi}{L_z} = \frac{\pi^3}{V} d^3n$$

Nun gehen wir zu Kugelkoordinaten über

$$d^3k = k^2 dk d\Omega = k^2 dk \sin\Theta d\Theta d\varphi$$

Im n–Raum ist das etwas komplizierter. Da wir *stehende* Wellen betrachten zählt jede Welle zusammen mit der entgegenlaufenden nur einmal. Wir berücksichtigen das dadurch, daß wir nur positive Werte für n_x, n_y und n_z zulassen. Zu einem Raumwinkelelement im n–Raum gehören so 8 Raumwinkelelemente im k–Raum. Andererseits gibt es zwei mögliche Polarisationen der beteiligten Wellen, was die Zahl der Zustände verdoppelt. Die Zahl der Zustände pro k-Intervall und Raumwinkelelement ist also

$$dN = 2\frac{1}{8}d^3n = \frac{V}{4\pi^3}k^2 dk d\Omega$$

Klassisch hat jeder dieser Zustände die Energie k_BT, denn nach dem Virialsatz hat ein Oszillator sowohl kinetische als auch potentielle Energie, hier eher elektrische und magnetische Energie, mit jeweils $\frac{1}{2}k_BT$. Integrieren wir noch über den vollen Raumwinkel (4π) so erhalten wir für die Energiedichte

$$\rho = \frac{1}{V}\int_\Omega \frac{dN}{dk} k_BT = \frac{4\pi}{V}\frac{dN}{dk} k_BT = k_BT/\pi^2 k^2$$

Um vom Wellenvektor auf die Frequenz umzurechnen berücksichten wir das Differential indem wir $\rho(k)dk = \rho(\omega)d\omega = \rho(\nu)d\nu$ setzen. Damit wird

$$\rho(\omega) = \frac{k_BT}{\pi^2c^3}\omega^2$$

was als Rayleigh-Jeans Gesetz bekannt ist.

Oder wir machen es wie Planck und setzen die Energie eines Zustands gleich $h\nu = hck/2\pi$ und gewichten ihn mit einer Boseverteilung $\frac{1}{\exp(\frac{h\nu}{k_B T})-1}$, die die Wahrscheinlichkeit angibt, daß der Zustand besetzt ist. Für die Energiedichte ergibt sich analog

$$\rho(k) = \frac{1}{V}\int_\Omega \frac{dN}{dk}\frac{\frac{hck}{2\pi}}{e^{\frac{hck}{2\pi k_B T}}-1} = \frac{4\pi}{V}\frac{V}{4\pi^3}k^2\frac{\frac{hck}{2\pi}}{e^{\frac{hck}{2\pi k_B T}}-1} = \frac{hck^3}{2\pi^3(e^{\frac{hck}{2\pi k_B T}}-1)}$$

bzw

$$\rho(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3(e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}}-1)}$$

Literatur

[1] Kuchling, Taschenbuch der Physik, 11. Auflage 1988.

[2] Gerthsen, Kneser, Physik, 11. Auflage 1971. Seite 375.

[3] `http://www.astro.ruhr-uni-bochum.de/huette/astronomie1_v2/kap3.pdf`

[4] `http://de.wikipedia.org/wiki/Sonne`

[5] `http://www.farbenlehre.com`

[6] `http://www.farbe.com`

[7] Landau Lifschitz, Lehrbuch der theoretischen Physik II, Klassische Feldtheorie

[8] Landau Lifschitz, Lehrbuch der theoretischen Physik V, Statistische Physik

[9] Haken, Wolf, Molekülphysik und Quantenchemie 3. Auflage

[10] Greiner, Theoretische Physik Band 4 Quantenmechanik: Einführung